数理解析研究所講究録
第 1865 巻 2013 年 179-184

動的幾何学ソフトによる複比の可視化とその幾何学的応用

東海大学・理学部数学科　前田 陽一
Yoichi Maeda
Department of Mathematics, Tokai University
maeda@tokai-u.jp

Abstract. この研究では，4つの複素数から定義される複比を，3次元双曲空間内の2つの測地線の配置と同一視することによって，動的幾何学ソフトを使って可視化を試みる．また，2つの測地線のなす角度が複比の関数として表されることを示す．さらに，この測地線のなす角度がユークリッド幾何における三角不等式と関係があることを紹介する．

1 はじめに

動的幾何学ソフト（ここでは Cabri3D を用いている）を使って，3次元双曲空間の上半空間モデルを簡単に作図できる（図1）．このモデルでは，測地線は，底平面に垂直な半円，または半直線として与えられる．図1には，青い2本の測地線がある．これらの測地線に

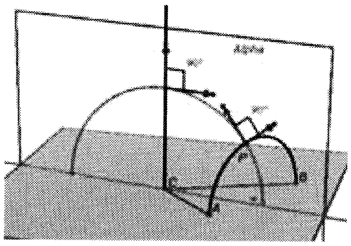

図 1: 3次元双曲空間の上半空間モデルと共通垂線

共に垂直に交わる共通垂線 (緑色の測地線) を作図するには，次のようにすればよい ([2]).

Construction 1.（共通垂線）

1. （入力）半円 AB, 半直線 $C\infty$
2. 角 ACB の二等分面 α
3. 平面 α と半円 AB との交点 P
4. （出力）平面 α 上での, 中心 C, 通過点 P の半円

このように, 動的幾何学ソフトを用いると簡単に作図ができ, さらに動的に動かせるので, 作図が正しいかどうかを証明なしで確かめることができる. 本稿では, 複比の可視化をこの 3 次元双曲空間の上半空間モデルで実現する. また, それを用いて, この空間内の測地線のなす角が複比の関数として表せることを図解する. 最後に, 双曲幾何における測地線のなす角と, ユークリッド幾何における三角不等式には, ある関係が存在することを述べる. なお, 使用しているソフトウェア Cabri3D は, 以下のサイトで evaluation version をダウンロードすることができる: http://www.cabri.com/dounload-cabri-3d.html

2 複素平面における複比

無限遠点 ∞ を含めた複素平面を $\hat{\mathbb{C}}$ とする. $\hat{\mathbb{C}}$ 上の 4 点 a, b, c, d に対して, その複比は次のように定義される ([1]) ;

$$[a, b; c, d] = \frac{a-c}{c-b} \cdot \frac{b-d}{d-a}.$$

複比はメビウス変換で不変である. また特に,

$$[z, 1; 0, \infty] = \frac{z-0}{0-1} \cdot \frac{1-\infty}{\infty-z} = z \tag{1}$$

であることに注意する. 図 2 は, 複素平面上に任意にとった 4 点 a, b, c, d である.

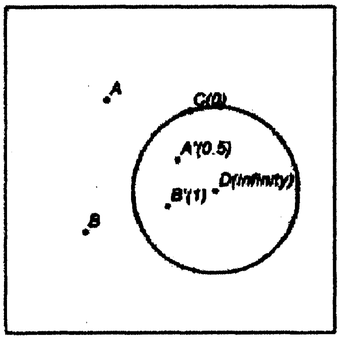

図 2: 複素平面での複比の求め方

この 4 点の複比の値は, 作図を用いてどのように求められるであろうか？もっとも簡単な方法は, 円に関する反転を用いる方法である.

Construction 2. (複比)

1. (入力) 4点 a, b, c, d
2. dを中心とし, cを通る円 $C1$
3. 2点 a, b を円 $C1$ に関して反転した点 a', b'
4. (出力) c を 0, b' を 1 としたときの a' の座標の共役複素数

円に関する反転をとり, dを無限遠点に移した状態で式 (1) を利用した. 円に関する反転自身は, 向きを変えるのでメビウス変換ではない. したがって, 複比の値を知るためには, 共役複素数をとることによって, 向きを戻す必要がある.

3 双曲空間での複比の可視化

複素数平面での4点から定義される複比について, その値を幾何的に求める方法について述べてきた. しかし, 平面上の4点の配置の関係を目で把握するのは, 一般に困難である. 「ばらばらの4点」よりも, 「2本の曲線の端点としての4点」の方が配置の認識が容易である. 3次元双曲空間の上半空間モデルは, この意味において複比の可視化にはうってつけのモデルである.

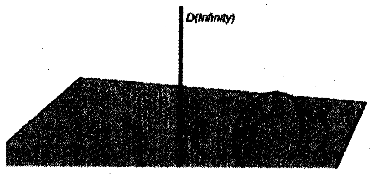

図 3: 双曲空間内の2本の測地線の配置と複比

図3のように, 双曲空間内で2本の測地線 AB と CD が与えられているとする. ただし, そのうちの1本 CD はユークリッド半直線 ($D = \infty$) とする. 無限遠平面を複素平面としたとき, 測地線の4つの端点 A, B, C, D から決まる複比の値は, 次のようにして求めることができる.

1. 点 C, 点 B, をそれぞれ 0, 1 となるように複素座標を入れる.
2. この座標系において, 点 A の座標を読む.
3. 点 A の座標が, 複比 $[A, B, C, D]$ の値である.

これは, 前節の式 (1) そのものである. このようにすると, 複比の値 z と測地線の配置 $(A(z), B(1), C(0), D(\infty))$ とが一対一に対応する. この同一視のことを, 本稿では「複比の

可視化」と呼ぶことにしよう．では，この複比の可視化と双曲空間での測地線の配置とは，どのような幾何的関係があるのであろうか？ その一つの例が，次節における測地線のなす角度である．

4 双曲空間での測地線のなす角

双曲空間内の 2 本の測地線のなす角は，複比の関数として与えられることを幾何的にみていこう．交わらない測地線のなす角を測るためには，第 1 節で紹介した共通垂線が重要な働きをする．図 4 は，2 本の測地線 AB と CD に共に垂直な共通垂線 H_1H_2 を示している．

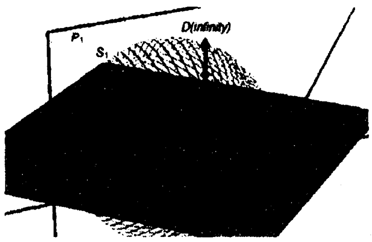

図 4: 共通垂線と測地線のなす角度

測地線のなす角度は，次の二つの測地的平面のなす角度に等しい:

1. ユークリッド半直線 CD と弧 H_1H_2 を含むユークリッド半平面 P_1
2. 半円 AB と弧 H_1H_2 を含むユークリッド半球面 S_1

半球面 S_1 の作図は，次のようにすればよい．

Construction 3.（測地的平面）

1. （入力）2 本の測地線，半円 AB と半直線 CD
2. 3 点 A, B, C を通る円 $C1$
3. A, B の垂直二等分面と弧 ACB との交点 P
4. （出力）中心が P，通過点 A となる半球面 $S1$

Construction 3 において，半円 AB が半球面 $S1$ に含まれることは，点 P が A, B の垂直二等分面上にあることから自明であるが，共通垂線 H_1H_2 が半球面 $S1$ に含まれることは，説明を要する．図 4 のように，点 Q を，円 ABC と垂直二等分面とのもう一つの交点 $(Q \neq P)$ とする．このとき，線分 PQ は円 $C1$ の直径であることに注意すると，$\angle PCQ = 90°$ である．また，$AQ = BQ$ であるから，$\angle ACQ = \angle BCQ$ であり，よって点 Q は $\angle ACB$ の角の

二等分面 P_1 上にある．したがって，線分 PC は平面 P_1 に垂直であり，平面 P_1 と球面 S_1 との交線は，中心が C で通過点が H_1 である円になる．これは，共通垂線 H_1H_2 が半球面 S_1 に含まれることを意味する．

このように，2 つの測地的平面 P_1, S_1 を用意すると，2 本の測地線のなす角は，無限遠平面上の角として測ることができる (図 4 の点 E での角)．以上の準備の元，次の定理を示そう．

Theorem 1　4 点 A, B, C, D を 3 次元双曲空間の無限遠平面上の点とする．z を複比 $[A, B, C, D]$ の値とする．このとき，2 本の測地線 AB と CD のなす角 θ は，次の式で与えられる:

$$\cos\theta = \frac{1 - |z|}{|1 - z|}.$$

Proof.　適当なメビウス変換をとることによって，図 4 のように 4 点 A, B, C, D を $z, 1, 0, \infty$ に写すことができる．角度 θ は，図 4 の $\angle EPC$ に等しいので，

$$\cos\theta = \frac{PC}{PE}.$$

一方，トレミーの定理を円 C_1 に適応すると，

$$PC \cdot AB + PB \cdot AC = PA \cdot BC.$$

$PA = PB = PE$ より，

$$\begin{aligned} PC \cdot AB + PE \cdot AC &= PE \cdot BC, \\ PC \cdot AB &= PE \cdot (BC - AC). \end{aligned}$$

したがって，

$$\cos\theta = \frac{PC}{PE} = \frac{BC - AC}{AB} = \frac{1 - |z|}{|1 - z|}. \qquad \square \qquad (2)$$

このように，2 本の測地線のなす角度は複比で表せる．$A = B$ のときは角度は不定となる．一方，$|z| = 1$ のとき，またそのときに限り，2 本の測地線は垂直となる．

5　ユークリッド幾何の三角不等式と双曲幾何の関係

最後にユークリッド幾何の三角不等式と双曲幾何との関係を見ておこう．ユークリッド平面上の三角形 ABC には，次の三角不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} AC &< AB + BC, \\ BC &< AB + AC. \end{aligned}$$

これらをまとめると，次の不等式が得られる．

$$\left|\frac{BC - AC}{AB}\right| < 1.$$

実は式 (2) の中にこの分数が表れている．この量は，双曲幾何において測地線のなす角度の余弦と関係があり，その値が 1 以下であることは自明であるが，そのことはユークリッド幾何における三角不等式と符合していることがわかる．

6 結論

本稿をまとめると，主に次の３つに集約される．

1. 動的幾何学ソフトは，作図を通して様々なことの理解，また新たな発見が得られるという意味において，教育研究に非常に有用なツールである．

2. 複比は，3 次元双曲空間内の２つの測地線の配置として，有効に可視化される．

3. 双曲空間内の２つの測地線のなす角度は，ユークリッド幾何における三角不等式と密接に関連している．

参考文献

[1] Berger, M. (1987). Geometry I. Berlin Heidelberg, Germany: Springer-Verlag.

[2] Maeda, Y. (2010). Construction of common perpendicular in hyperbolic space. Proceedings of th Fifteen Asian Technology Conference in Mathematics, pp.210-218.